Estabilización en tiempo finito de una familia de sistemas no lineales mediante controles posicionales acotados

Abdon E. Choque Rivero
Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicoás de Hidalgo,
Edificio C–3, C.U., 58040, Morelia, Mich., México
abdon@ifm.umich.mx

***Resumen*— Usando la función de controlabilidad describimos de manera explícita la solución del problema de estabilidad en tiempo finito de la familia de sistemas de control no lineal de la forma: $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1^3 P_{2n}(x_1)$ para $|u| \le 1$ donde $P_n(x_1) = x_1^{2n} + p_{n-1}x_1^{2n-2} + \ldots + p_1 x_1^2 + p_0$ es un polinomio real positivo, es decir, un polinomio que toma valores positivos. En este trabajo encontramos un conjunto de controles acotados $u = u(x_1, x_2)$ con $|u| \le 1$ tales que la trayectoria del sistema $\dot{x}_1 = u(x_1, x_2)$, $\dot{x}_2 = x_1^3 P_{2n}(x_1)$, que comienza en el punto inicial $(x_1^0, x_2^0$ termina en el origen en tiempo finito $T(x_1^0, x_2^0)$.**

Palabras clave: Sistemas no lineales, control posicional acotado, función del tipo de Lyapunov.

I. INTRODUCCIN

En el presente trabajo desarrollamos el método de la Función de Controlabilidad introducida en (Korobov, 1979) para el problema de estabilización en tiempo finito del siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \quad |u| \le 1, \\ \dot{x}_2 = x_1^3 P_{2n}(x_1). \end{cases} \tag{1}$$

donde $P_{2n}(x_1) := x_1^{2n} + p_{n-1}x_1^{2n-2} + \ldots + p_1 x_1^2 + p_0$ es un polinomio real positivo, es decir, un polinomio que toma valores positivos. En este trabajo damos solución al siguiente problema:
Hallar un conjunto de controles acotados $u = u(x_1, x_2)$ *con* $|u| \le 1$ *tales que la trayectoria del sistema* $\dot{x}_1 = u(x_1, x_2)$, $\dot{x}_2 = x_1^3 P_{2n}(x_1)$, *que comienza en el punto inicial* (x_1^0, x_2^0) *de* $\mathbb{R}^2$ *termina en el origen en tiempo finito* $T(x_1^0, x_2^0)$. Este problema se dice problema de estabilidad en tiempo finito o problema de síntesis.

Notemos que la parte lineal del sistema considerado no es controlable, además el sistema (1) no satisface la condición Jakubczyk–Respondek–Hunt–Su acerca de sistemas linealizables por retroalimentación en un punto (Jakubczyk , 1980) (Hunt, 1981). Tales *sistemas singulares* han sido estudiados por Respondek (Respondek, 1986), Celikovsky y Arranda–Bricaire (Celikovsky, 1999) y Tsinias (Tsinias, 1995).

Es importante notar también que no utilizamos ningún criterio de controlabilidad al origen, sino obtenemos de manera constructiva controles posicionales $u(x_1, x_2)$ que trasladan cada posición inicial (x_1^0, x_2^0) al origen. De esta manera podemos afirmar que el sistema (1) es globalmente controlable al origen. Como ejemplo de un sistema análogo a (1) pero no controlable citamos el sistema $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1^2$, (ver (Coron, 2007)).

Cabe mencionar que la función de controlabilidad (FC) es una función del tipo de Lyapunov, sin embargo, se distingue de esta última principalmente por las siguientes razones:

a) La FC es aplicable a puntos que no necesariamente son puntos de equilibrio, mientras que las funciones de Lyapunov se aplican en una vencidad de un punto de equilibrio.
b) Permite estabilizar un sistema controlable en tiempo finito, mientras que las funciones de Lyapunov estabilizan sistemas controlables por retroalimentación en tiempo infinito.

II. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE ESTABILIDAD EN TIEMPO FINITO

Sea $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. De acuerdo al método de la Función de Controlabilidad de V. I. Korobov (ver (Korobov, 1979), (Korobov–Sklyar, 1990),(Choque Rivero et al., 2004) y (Choque Rivero , 2009)), vamos a construir el par $(u(x), \Theta(x))$ tal que se satisfagan las condiciones del teorema fundamental (Korobov, 1979, Teorema 1). Notemos que en (Choque Rivero, 2009) se resolvió el problema planteado para $P_{2n}(x_1) \equiv 1$.

Mediante $\mathbb{R}_-$ denotamos el conjunto de los números reales negativos. Proponemos el conjunto de controles posicionales:

$$\begin{aligned} U := \Big\{ u(x) \mid u(x) &= \frac{a_1 x_1}{\Theta(x)} + \frac{a_2 x_2}{\Theta^4(x)} \\ &+ \frac{a_3 x_1^3}{\Theta^3(x)} \left(p_0 + p_1 x_1^2 + \ldots + p_n x_1^{2n} \right), \\ &\text{with } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}_-, \quad 25a_2 + 16a_1 a_3 > 0 \Big\}. \end{aligned} \tag{2}$$

El sistema de controlabilidad $\Theta(x)$ se determina como la única solución positiva de la ecuación

$$2a_0\Theta = (D_\Theta F D_\Theta x, x) \tag{3}$$

para algún $a_0 > 0$ y $f_{12} > 0$, donde

$$F := \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_2} f_{12} & f_{12} \\ f_{12} & -f_{12} a_3 \end{pmatrix}, \; D_\Theta := \begin{pmatrix} \Theta^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \Theta^{-\frac{7}{2}} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Lema 1: Sea que $u \in U$. Entonces existe un $\gamma > 0$ tal que

$$\dot{\Theta}(x) \leq -\gamma, \quad (5)$$

donde $\Theta(x)$ es una solución de la ecuación (3).

Demostración: Derivando Θ en (3) respecto de t en virtud al sistema (1) con $u(x) \in U$, tenemos $\dot{\Theta} = \dfrac{B_1}{B_2}$ donde

$$\begin{aligned} B_1 :=& \frac{2 f_{12} \left(a_1 \theta^3 x_1 + a_2 x_2\right)^2}{a_2 \theta^8} + \frac{2\left(a_2 + a_1 a_3\right) f_{12} x_1^4}{a_2 \theta^4} \\ & \cdot \left(p_0 + p_1 x_1^2 + p_2 x_1^4 + \ldots + p_m x_1^{2m}\right), \quad (6) \\ B_2 :=& \frac{2 f_{12} \left(a_1 \theta^6 x_1^2 + 5 a_2 \theta^3 x_1 x_2 - 4 a_2 a_3 x_2^2\right)}{a_2 \theta^8}. \quad (7) \end{aligned}$$

Sustituyendo

$$y_1 := x_1 \Theta^3, \quad y_2 := x_2, \quad (8)$$

tenemos $\dot{\Theta} = \dfrac{B_3}{B_4}$ donde

$$\begin{aligned} B_3 :=& (\mathcal{A}y, y) - \left(1 + \frac{a_1 a_3}{a_2}\right) \frac{y_1^4}{\Theta^8} \\ & \cdot \left(p_0 + p_1 \frac{y_1^2}{\Theta^6} + p_2 \frac{y_1^4}{\Theta^{12}} + \ldots + p_n \frac{y_1^{2n}}{\Theta^{6n}}\right) \quad (9) \\ B_4 :=& (\mathcal{B}y, y) \quad (10) \end{aligned}$$

con $y^T := (y_1, y_2)$, $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} \frac{-a_1^2}{a_2} & -a_1 \\ -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}$, y $\mathcal{B} := \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -4a_3 \end{pmatrix}$. Ya que $(\mathcal{A}y, y) \geq 0$, $(\mathcal{B}y, y) > 0$, $1 + \frac{a_1 a_3}{a_2} < 0$ y del hecho que el último factor en (9) es un polinomio nonegativo, tenemos $\dot{\Theta} < 0$. Para obtener (5) utilizamos los resultados de (Choque Rivero, 2009), más precisamente, sea $x_2 = C \Theta^3 x_1$ con $C \in \mathbb{R}$. De donde tenemos,

$$\frac{x_1^2}{\Theta^2} = \frac{y_1^2}{\Theta^8} = \frac{2 a_0}{\left(\frac{a_1}{a_2} + 2C - a_3 C^2\right) f_{12}}, \quad (11)$$

consecuentemente,

$$\dot{\Theta} = -\frac{(C a_2 + a_1)^2 + \frac{2 a_0 (a_2 + a_1 a_3) Q_{2n}(\Theta, \hat{C})}{\left(\frac{a_1}{a_2} + 2C - a_3 C^2\right) f_{12}}}{-a_1 - 5 a_2 C + 4 a_2 a_3 C^2}. \quad (12)$$

donde $\hat{C} := \frac{2 a_0}{\left(\frac{a_1}{a_2} + 2C - a_3 C^2\right) f_{12}}$ y $Q_{2n} := p_0 + p_1 \Theta^2 \hat{C} + p_2 \Theta^4 \hat{C}^2 + \ldots + p_n \Theta^{2n} \hat{C}^{2n}$. Ya que parte derecha de (12) es continua y negativa para $C \in \mathbb{R}$ y su limite para $C \to \pm\infty$ es igual a $\dfrac{-a_2}{4 a_3}$, existe un número $\gamma > 0$, tal que para todo x se satisface (5).

■

Observación 1: Utilizando el Teorema 1 de (Korobov, 1979) es posible estimar el tiempo de recorrido desde el punto (x_1^0, x_2^0) hasta el origen:

$$T(x_1^0, x_2^0) \leq \frac{\Theta((x_1^0, x_2^0))}{\gamma}. \quad (13)$$

Las siguientes afirmaciones se demuestran de manera análoga como en (Choque Rivero, 2009).

Lema 2: Sean que $u \in U$ y $\Theta(x)$ es solución de (3). Entonces:

1) $|u\,(x)| \leq 1$.
2) $\Theta(x)$ es continua para todo $x \in \mathbb{R}^2$ con $\Theta(0) = 0$. Además, la función Θ es diferenciable para $x \neq 0$.

El resultado principal de este trabajo es el siguiente:

Teorema 1: Sea $u(x) \in U$ y sea $\Theta(x)$ la solución positiva de (3) con $a_0 > 0$ por el Lema 2.Entonces el par $(u(x), \Theta(x))$ resuelve el problema de estabilidad en tiempo finito para el sistema (1).

Demostración: La demostración se obtiene verificando condiciones de Teorema 1 de (Korobov, 1979) dados por los Lemas 1–2. ■

Ejemplo

Consideremos el sistema $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1^3(1 + x_1^2)$ para $|u| \leq 1$, con condición inicial $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 1$. La función de controlabilidad $\theta(x)$ se determina como solución de la ecuación

$$2 a_0 \theta^8 - 20 x_1^2 \theta^6 - 2 x_1 x_2 \theta^3 - \frac{x_2^2}{10} = 0$$

con $2a_0 = 25{,}471$. En particular para $x_0 = (1, 1)$, $\theta(x_0) = 0{,}9408$. El control posicional está dado por

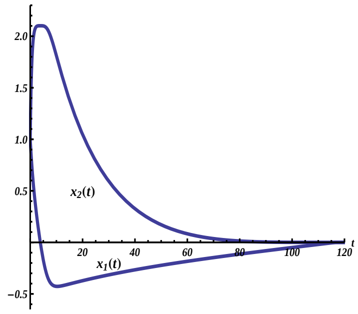
$$u(x, \theta(x)) = -\frac{x_1}{5\Theta(x)} - \frac{x_2}{100\Theta^4(x)} - \frac{x_1^3}{10\Theta^3(x)}\left(1 + x_1^2\right).$$

De la relación y de (12) y (13) el tiempo de recorrido de $(1, 1)$ al origen es $T(x_0) \leq 146$. El retrato fase, las gráficas de función $\theta(x)$, del control $u(x)$ se pueden obtener del sistema

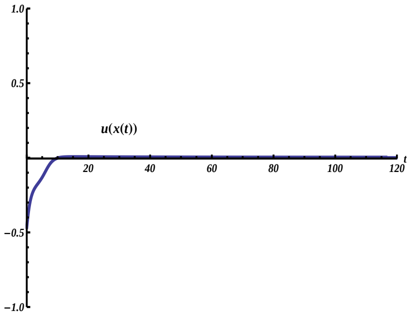
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{x_1}{5\Theta(x)} - \frac{x_2}{100\Theta^4(x)} - \frac{x_1^3}{10\Theta^3(x)}\left(1 + x_1^2\right), \\ \dot{x}_2 = x_1^3(1 + x_1^2). \\ \dot{\theta} = \frac{-4x_1^2\theta^6 - 2x_1^6\theta^4 - x_1^4\theta^4 - \frac{2}{5}x_1 x_2 \theta^3 - \frac{1}{10}x_1^5 x_2 \theta - \frac{x_2^2}{100}}{20 x_1^2 \theta^6 + 5 x_1 x_2 \theta^3 + \frac{2x_2^2}{5}} \\ x_1^0 = 1, \; x_2^0 = 1, \; \theta_0 = 0{,}9408. \end{cases}$$

A continuación presentamos algunas gráficas.

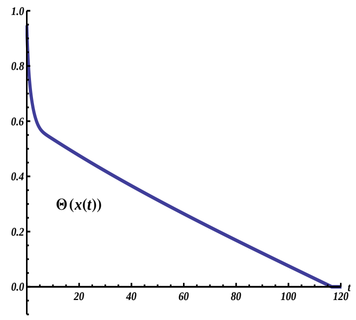
La gráfica de las funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ está dada por:



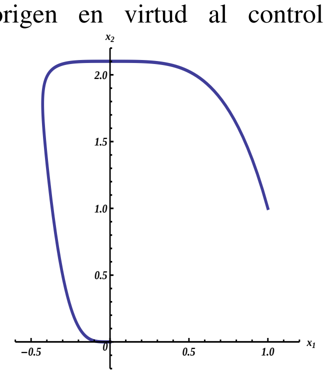
La gráfica de control $u(x(t))$ en la trayectoria del sistema esta dada por:



La función $\theta(x(t))$ en la trayectoria tiene la siguiente gráfica:



El retrato fase del sistema desde el punto inicial $(1, 1)$ al origen en virtud al control $u(x)$ está dada por:



III. Conclusión

En el presente trabajo describimos de manera explícita la solución del problema de estabilidad en tiempo finito de la familia de sistemas de control no lineal (1) con controles acotados. La particularidad de este sistema estriba en que su parte lineal es no controlable. Además el método constructivo de la función de controlabilidad permite responder positivamente al problema de controlabilidad del sistema dado.

A pesar que el sistema que considera este trabajo no cuenta con una aplicación determinada, la importancia del desarrollo del método de las funciones del tipo de Lyapunov (función de controlabilidad) a sistemas no lineales es evidente. Notemos que el método mencionado había sido aplicado solamente a sistemas de control cuya parte lineal es controlable con excepción del trabajo (Choque Rivero, 2009) y el presente.

Referencias

A.E. Choque Rivero, V.I. Korobov, V.O. Skoryk, *Controllability function as time of motion I. Mat. Fiz. Anal. Geom, 11(2), (2004), 208–225.*

A.E. Choque Rivero *Solution of a Synthesis problem of a Nonlinear Control System Mat. Vestnik Kharkov Univ. Ser. Mat. No. 850, (2009), 45–51.*

S. Celikovsky, E. Arranda-Bricaire, *Constructive nonsmooth stabilization of triangular systems, Systems Control Lett. 36 (1999) 21–37.*

L.R. Hunt, R. Su., *Linear equivalents of nonlinear time varying systems, Proc. of the MTNS, Santa Monica, 1981, 119–123.*

B. Jakubczyk, W. Respondek, *On linearization of control systems, Bull. Acad. Polonaise., 1980, 517–522.*

J.M. Coron, *Control and Nonlinearity, Mathematical Surveys and Monographs, Vol 136, (2007).*

V.I. Korobov, *A general approach to the solution of the problem of synthesizing bounded controls in a control problem. Mat. Sb. 109(151), (1979), 582–606.*

V.I. Korobov, *The Controllability Function Method* (in Russian). R&C Dynamics, Moscow–Ighevsk, 2007.

V.I. Korobov and G. M. Sklyar, *Methods for constructing positional controls, and a feasible maximum principle. Differential Equations 26(11), (1990), 1422–1431.*

W. Respondek, *Global aspects of linearization, equivalence to polynomial forms and decomposition of nonlinear control systems, in: M. Fliess, M. Hazewinkel (Eds.), Algebraic and Geometrical Methodos in Nonlinear Control Theory, Reidel, Dorderscht, 1986, 257–284.*

J. Tsinias, *Partial-state global stabilization for general triangular systems, Systems Control Lett. 24 (1995), 139–145.*